B - L	Théorème de Vitali	L 201 L 234 L 235 L 241 L 262

$(X_i)_{i\in I}$ est équi-intégrable si $\forall \varepsilon > 0, \exists c > 0, \forall i \in I, \int_{\{|X_i|>c\}} |X_i| \, dP < \varepsilon$

Caractérisation des familles équi-intégrables :

$(X_i)_{i\in I}$ est équi-intégrable $\iff \begin{cases} (1)\ \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall A \in \mathcal{A}, P(A) < \alpha \Rightarrow \forall i \in I, \int_A |X_i| dP < \varepsilon \\ (2)\ \exists M > 0, \forall i \in I, \|X_i\|_1 \leqslant M . \end{cases}$

Démonstration : $\Rightarrow$) Supposons $(X_i)_{i\in I}$ équi-intégrable :

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists c > 0, \forall i \in I, \quad \int_{\{|X_i|>c\}} |X_i| \, dP < \frac{\varepsilon}{2}$.

(1) On pose $\alpha = \frac{\varepsilon}{2c} > 0$, alors $\forall A \in \mathcal{A}$ tq $P(A) < \alpha$, on a :

$$\forall i \in I, \int_A |X_i| \, dP = \int_{A \cap \{|X_i|>c\}} |X_i| \, dP + \int_{A \cap \{|X_i| \leqslant c\}} |X_i| \, dP$$

$$\leqslant \int_{\{|X_i|>c\}} |X_i| \, dP + \int_A c \, dP < \frac{\varepsilon}{2} + c \, P(A) \leqslant \varepsilon$$

(2) $\forall i \in I, \|X_i\|_1 = \int_\Omega |X_i| \, dP \leqslant \int_{\{|X_i|>c\}} |X_i| dP + \int_{\{|X_i| \leqslant c\}} |X_i| dP \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + c < \infty$

$\Leftarrow$) Supposons $(X_i)_{i\in I}$ équicontinue et bornée.

Soit $\varepsilon > 0$. Par (1), $\exists \alpha > 0, \forall A \in \mathcal{A}, P(A) < \alpha \Rightarrow \forall i \in I, \int_A |X_i| \, dP < \varepsilon$

On pose $C = \frac{M}{\alpha} > 0$, alors $\forall c > C$,

comme $\forall i \in I, \ P(|X_i| > c) \leqslant \frac{1}{c} E(|X_i|) \leqslant \frac{M}{C} = \alpha$,

en appliquant (1) avec $A_i = \{|X_i| > c\}$, on a : $\forall c > C, \forall i \in I, \int_{\{|X_i|>c\}} |X_i| dP < \varepsilon$

ainsi, $\forall c > C$, $\sup_{i \in I} \int_{\{|X_i|>c\}} |X_i| \, dP \leqslant \varepsilon$

d'où $(X_i)_{i\in I}$ est équi-intégrable.

__Th de Vitali__ : Soit $(X_n) \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ et $X \in \mathbb{L}^0(\Omega, \mathbb{K})$.

On a : $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable

$\iff X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathbb{K})$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \|X_n - X\|_1 = 0$.

__Démonstration__ : __$\Rightarrow$]__ Mq $X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathbb{K})$.

Comme $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, on peut extraire une s/s suite $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tq $X_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{p.s.} X$.

alors $|X| = \lim\limits_{k\to\infty} |X_{n_k}|$ p.s.

Comme (X_n) est équi-intégrable, elle est bornée. D'après le lemme de Fatou,

$\|X\|_1 = \mathbb{E}(\underline{\lim}_{k\to\infty} |X_{n_k}|) \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \mathbb{E}(|X_{n_k}|) \leq \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_k|) < \infty$: $X \in \mathbb{L}^1$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme (X_n) est équi-intégrable, $(X_n) \cup \{X\}$ aussi,

donc $\exists \alpha > 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) < \alpha \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \int_A |X_n| \, d\mathbb{P} < \varepsilon$ et $\int_A |X| \, d\mathbb{P} < \varepsilon$

Comme $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \alpha$.

On applique l'équi-continuité pour $A_n = \{|X_n - X| \geq \varepsilon\}$

alors $\forall n \geq N$, $\|X_n - X\|_1 = \int_{^cA_n} |X_n - X| \, d\mathbb{P} + \int_{A_n} |X_n - X| \, d\mathbb{P}$

$$\leq \int_{^cA_n} |X_n - X| \, d\mathbb{P} + \int_{A_n} |X_n| \, d\mathbb{P} + \int_{A_n} |X| \, d\mathbb{P}$$

$$\leq \varepsilon . \mathbb{P}(^cA_n) + 2\varepsilon \leq 3\varepsilon$$

Ainsi, $X_n \xrightarrow{\|.\|_1} X$.

__$\Leftarrow$]__ D'une part, par Markov, comme $X_n \xrightarrow{\|.\|_1} X$, on a $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

D'autre part, soit $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\|X_n - X\|_1 < \varepsilon$.

La famille finie $(X_0, \dots, X_{N-1})$ est équi-intégrable.

Comme $X \in \mathbb{L}^1$, $\exists \; > 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) < \alpha \Rightarrow \int_A |X| \, d\mathbb{P} < \varepsilon$

alors $\mathbb{P}(A) < \alpha \Rightarrow \forall n \geq N$, $\int_A |X_n| \, d\mathbb{P} \leq \int_A |X_n - X| \, d\mathbb{P} + \int_A |X| \, d\mathbb{P} \leq \varepsilon + \|X_n - X\|_1 \leq 2\varepsilon$

donc $(X_n)_{n\geq N}$ équi-continue.

De m̂, $\forall n \geq N$, $\|X_n\|_1 \leq \|X\|_1 + \|X_n - X\|_1 < \infty$: $(X_n)_{n\geq N}$ est bornée.

Ainsi $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable.